8.4 Inkluzije L^p prostora

Do sada smo razmatrali prostore $L^p(X)$, za $p \in [1, \infty]$. Mogu se definisati i $L^p(X)$ prostori za $p \in (0, 1)$, to je skup funkcija f (klasa ekvivalencije funkcija jednakih s.s.) koje zadovoljavaju osobinu $\int_X |f|^p \, d\mu < \infty$. Ove prostore snabdevamo metrikom $d(f, g) = \int_X | f - g |^p \, d\mu$ u odnosu na koju $(L^p(X), d)$ postaje kompletan metrički prostor. Naglasimo da $(\int |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$ nije norma, odnosno da metrika d nije indukovana normom, tako da $L^p(X)$, $0 < p < 1$, nisu Banahovi prostori. Dokaz kompletnosti se izvodi potpuno isto kao u Teoremi 8.1.

Napomenimo da je jedina neprekidna linearna funkcionela na $L^p(X)$, $p \in (0, 1)$, nula funkcija. U Poglavlju 10.4 ćemo pokazati da je $(L^p)' = L^q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, za $1 \leq p < \infty$.

U ovom poglavlju ćemo se baviti pitanjem kada je $L^p \subseteq L^q$ u zavisnosti od $p < q$ ili $q < p$. Nadalje ćemo pretpostaviti da radimo sa L^p prostorima za $p \in (0, \infty]$. U narednim propozicijama oznaka $\| \cdot \|_p$ označava normu kada je $p \geq 1$, dok za $p \in (0, 1)$ ona označava samo desnu stranu relacije (8.2) kao konačnu veličinu.

Propozicija 8.3. Neka je $\mu(X) < \infty$ i $0 < p < q \leq \infty$. Tada $L^q(X) \subseteq L^p(X)$ i za svako $f \in L^q(X)$ važi

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q \, \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

Specijalno, ako je $\mu(X) = 1$, tada $\|f\|_p \leq \|f\|_q$.

Dokaz: Za $q = \infty$ imamo $\|f\|_p^p = \int_X |f|^p d\mu \leq \|f\|_\infty^p \int_X d\mu = \|f\|_\infty^p \mu(X)$.

Ako je $q < \infty$, primenom Helderove nejednakosti sa konjugovanim indeksima $r = \frac{q}{p} > 1$ i $s = \frac{q}{q-p} > 1$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$, dobijamo s obzirom da je $\mu(X) < \infty$ te $1 \in L^s$,

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p \cdot 1 \, d\mu \leq \|f^p\|_{\frac{q}{p}} \|1\|_{\frac{q}{q-p}} = \|f\|_q^p \mu(X)^{\frac{q-p}{q}}.$$

■

Primer 8.3. Posmatrajmo prostor nizova l^p datih u Primeru 8.1, $1 \leq p \leq \infty$. Za meru prebrojavanja μ ne važi uslov iz Propozicije 8.3 jer je $\mu(\mathbf{N}) = \infty$. U prostoru nizova važi upravo obrnuta inkluzija: ako je $p < q$, tada je $l^p \subseteq l^q$. Zaista, ako je $(x_n)_n$ niz u l^p tada iz $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ i činjenice da opšti član konvergentnog reda teži nuli sledi da postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da je $|x_n| \leq 1$, $n \geq n_0$. To implicira $|x_n|^q \leq |x_n|^p$, $n \geq n_0$. Sada iz $\sum_{n=n_0}^{\infty} |x_n|^q \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ sledi da je $(x_n)_n \in l^q$.

Primer 8.4. Neka je $X = [0, \infty)$ i m Lebegova mera. Jasno, $m(X) = \infty$. Neka je $p < q$. Pokazaćemo da $L^p \nsubseteq L^q$ i $L^q \nsubseteq L^p$. Zaista, za funkciju $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \kappa_{(0,1)}(x)$ važi da je $f \in L^1$ ali $f \notin L^2$. S druge strane, za funkciju $g(x) = \frac{1}{x} \kappa_{[1,\infty)}(x)$ važi da je $g \in L^2$ ali $g \notin L^1$.

Razni tipovi konvergencija

Pored već uvedenog pojma konvergencije u $L^p(X)$, podsetićemo se već poznatih tipova konvergencije (uniformne, tačkaste i konvergencije skoro svuda) i uvešćemo dva nova pojma: pojam konvergencije u meri i pojam skoro uniformne konvergencije. Ispitaćemo odnose između ovih tipova konvergencije, posmatrajući – jednostavnosti radi – samo realne funkcije iz $f \in L^p(X), p \in [1, \infty)$, što podrazumeva da identifikujemo funkcije jednake skoro svuda i da funkcije mogu uzimati vrednosti $+\infty$ i $-\infty$ na skupovima mere nula.

9.1 Uniformna i tačkasta konvergencija. Konvergencija skoro svuda i u srednjem redu.

Definicija 9.1. Neka je f_n, $n \in \mathbf{N}$, niz realnih funkcija na $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Za niz $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ kažemo da:

- (KU) *konvergira uniformno* ka $f : X \to \mathbf{R}$, ako

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N})(\forall n \geq N(\varepsilon))(\forall x \in X)(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon);$$

- (KT) *konvergira tačkasto* ka $f : X \to \mathbf{R}$, ako

$$(\forall\varepsilon > 0)(\forall x \in X)(\exists N(\varepsilon, x) \in \mathbf{N})(\forall n \geq N(\varepsilon, x))(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon);$$

- (KSS) *konvergira skoro svuda* ka $f : X \to \mathbf{R}$, ako

$$(\exists M \in \mathcal{M})(\mu(M) = 0)(\forall\varepsilon > 0)(\forall x \in X \setminus M)(\exists N(\varepsilon, x) \in \mathbf{N})$$
$$(\forall n \geq N(\varepsilon, x))(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon);$$

- (L^p) *konvergira u srednjem redu* p, $p \geq 1$, ka $f : X \to \mathbf{R}$, $f \in L^p(X)$, ako

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N})(\forall n \geq N(\varepsilon))(\|f_n - f\|_p < \varepsilon)$$

▲

Jasno, $(KU) \Rightarrow (KT) \Rightarrow (KSS)$. Obrnute implikacije u opštem slučaju ne važe. Ipak, u slučaju kada je kardinalnost skupa X konačna, imamo da tačkasta konvergencija povlači uniformnu konvergenciju. Slično, u slučaju kada je prazan skup jedini skup mere nula, onda skoro-svuda konvergencija implicira tačkastu konvergenciju.

Kako je $L^p(X)$ kompletan, ako je $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ niz iz $L^p(X)$ takav da za neku merljivu funkciju f važi
$\|f_n - f\|_p \to 0 \quad \text{kad} \quad n \to \infty$, sledi $f \in L^p(X)$.

Primer 9.1. Posmatrajmo prostor $\mathbf{R}$ sa Borelovom $\sigma-$ algebrom $\mathcal{B}$ i Lebegovom merom m. Niz $f_n = n^{-1/p}\kappa_{[0,n]}$, $n \in \mathbf{N}$, konvergira uniformno ka $f = 0$, ali ne konvergira u $L^p(\mathbf{R})$.

Međutim, uz dodatnu pretpostavku da je $\mu(X) < +\infty$, važi:

Propozicija 9.1. Neka je $\mu(X) < \infty$ i neka je $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ niz u $L^p(X)$ koji uniformno konvergira ka f na X. Tada $f \in L^p(X)$ i $f_n \to f$ u $L^p(X)$, $n \to \infty$.

Dokaz: Neka je $\varepsilon > 0$ i neka za $N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ važi

$$n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Važi

$$\|f_n - f\|_p = (\int_X |f_n(x) - f(x)|^p d\mu)^{1/p} \leq (\int_X \varepsilon^p d\mu)^{1/p} = \varepsilon \mu(X)^{1/p}, \quad n \in \mathbf{N},$$

te $f_n \to f$ u $L^p(X)$. ∎

Sledeći primer pokazuje da se može desiti da niz $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ u $L^p(X)$ tačkasto konvergira ka $f \in L^p(X)$, ali da ne konvergira u $L^p(X)$, čak iako je $\mu(X) < +\infty$.

Primer 9.2. Posmatrajmo prostor $X = [0, 2]$ sa Borelovom $\sigma-$ algebrom $\mathcal{B}_{[0,2]}$ i Lebegovom merom m. Niz $f_n = n\kappa_{[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]}$, $n \in \mathbf{N}$, konvergira tačkasto ka $f = 0$, ali ne konvergira u $L^p(X)$.

Ipak, uz dodatnu pretpostavku da za niz $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ postoji funkcija $g \in L^p(X)$ takva da je $| f_n | \leq g$ za svako $n \in \mathbf{N}$ (tj. da postoji Lebeg integrabilna dominanta), tačkasta konvergencija implicira konvergenciju u $L^p(X)$.

Propozicija 9.2. Neka je $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ niz u $L^p(X)$ koji konvergira skoro svuda ka f. Ako postoji $g \in L^p(X)$ tako da važi

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad x \in X, \quad n \in \mathbf{N},$$

tada $f \in L^p(X)$ i $f_n \to f$ u $L^p(X)$.

Dokaz: Iz pretpostavke sledi $|f(x)| \leq g(x)$ s.s.. Kako $g \in L^p(X)$, važi da je $f \in L^p(X)$. Važi

$$|f_n(x) - f(x)|^p \leq (2g(x))^p \quad \text{s.s.}.$$

Kako $|f_n(x) - f(x)|^p \to 0$ s.s. i $2^p g^p \in L^1(X)$, na osnovu Lebegove teoreme o dominantnoj konvergenciji sledi

$$\lim_{n \to \infty} \int_X |f_n - f|^p d\mu = 0.$$

∎

Prethodno tvrđenje se često koristi pod jednostavnijim uslovima $\mu(X) < \infty$ i $|f_n(x)| < K$, $n \in \mathbf{N}$, $x \in X$ s.s.. Naime, ako je $\mu(X) < \infty$, tada konstantna funkcija pripada $L^p(X)$.

Sledeći primer pokazuje da iz L^p konvergencije ne sledi konvergencija skoro svuda.

Primer 9.3. Neka je $X = [0,1]$, $\mathcal{M} = \mathcal{B}_{[0,1]}$ i m Lebegova mera.
Posmatrajmo niz intervala

$$I_1 = [0,1],$$

$$I_2 = [0, \tfrac{1}{2}] \quad I_3 = [\tfrac{1}{2}, 1],$$

$$I_4 = [0, \tfrac{1}{3}], \quad I_5 = [\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}], \quad I_6 = [\tfrac{2}{3}, 1],$$

$$I_7 = [0, \tfrac{1}{4}], \quad I_8 = [\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}], \quad I_9 = [\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}], \quad I_{10} = [\tfrac{3}{4}, 1], \ldots$$

Neka je $f_n = \kappa_{I_n}$, $n \in \mathbf{N}$, $f = 0$. Primetimo, ako je

$$n \geq \frac{k(k+1)}{2} = 1 + 2 + \ldots + k$$

tada je $m(I_n) \leq \dfrac{1}{k}$. Važi

$$\|f_n - f\|_p^p = \int_{[0,1]} |f_n|^p dm \leq (\frac{1}{k})^p.$$

Dakle, $f_n \to f$ u $L^p([0,1])$.

Može se pokazati da za svako $x_0 \in [0,1]$ postoje podnizovi od $\{f_n(x_0), n \in \mathbf{N}\}$, takvi da $f_{m_n}(x_0) \to 1$ i $f_{p_n}(x_0) \to 0$ (to su konstantni podnizovi sačinjeni od samo jedinica, respektivno nula). Dakle, ni za jedno $x \in [0,1]$ niz $f_n(x)$ ne konvergira.

9.2 Konvergencija u meri.

Definicija 9.2. Niz merljivih realnih funkcija $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ na $(X, \mathcal{M}, \mu)$

- (KM) *konvergira u meri* ka $f : X \to \mathbf{R}$, ako

$$(\forall \alpha > 0) \ \lim_{n \to \infty} \mu(\{x \in X; \ |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}) = 0.$$

- Niz je Košijev u meri, ako za svako $\alpha > 0$

$$\lim_{m,n \to \infty} \mu(\{x \in X; \ |f_n(x) - f_m(x)| \geq \alpha\}) = 0.$$

▲

Ako $f_n \to f$, $n \to \infty$, uniformno na X, tada za svako $\alpha > 0$ postoji $n_0(\alpha)$ tako da važi

$$n > n_0(\alpha) \Rightarrow \{x \in X; \ |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\} = \emptyset.$$

Dakle, $(KU) \Rightarrow (KM)$.

Primetimo još da ako je $\mu(X) < \infty$, tada je uslov konvergencije u meri ekvivalentan sa uslovom da je

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \alpha\}) = \mu(X), \quad \text{za svako } \alpha > 0.$$

Primer 9.4. Posmatrajmo prostor $X = [1, \infty)$ sa Borelovom $\sigma-$ algebrom $\mathcal{B}_X$ i Lebegovom merom m. Neka je $f_n = \kappa_{[n,n+1]}$, $n \in \mathbf{N}$. To je niz koji konvergira tačkasto ka $f = 0$, ali ne konvergira u meri ka $f = 0$. Niz iz Primera 9.3 konvergira u meri ka $f = 0$, ali ne konvergira ni u jednoj tački.

Lema 9.1. Neka je $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ niz merljivih funkcija iz $L^p(X)$ koji konvergira u $L^p(X)$ ka f. Tada $f_n \to f$, $n \to \infty$ u meri.

Dokaz: Neka niz $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergira u $L^p(X)$ ka f. Neka je $\alpha > 0$. Stavimo

$$E_n(\alpha) = \{x \in X :| f_n(x) - f(x) |\geq \alpha\}.$$

Važi:

$$\int_X | f_n - f |^p \, d\mu \geq \int_{E_n(\alpha)} | f_n - f |^p \, d\mu \geq \alpha^p \mu(E_n(\alpha)) \geq 0,$$

dakle $\mu(E_n(\alpha)) \longrightarrow 0$, kada $n \to \infty$. ■

Dakle, konvergencija u $L^p(X)$ implicira konvergenciju u meri. Koristeći tu činjenicu i Primer 9.3 zaključujemo da konvergencija u meri ne implicira konvergenciju skoro svuda. Ipak, sledeća teorema pokazuje da konvergencija u meri nekog niza $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ implicira egzistenciju njegovog podniza koji konvergira skoro svuda.

Teorema 9.1. (Risova teorema.) Neka je $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ niz merljivih realnih funkcija koji je Košijev u meri.

i) Postoji podniz $(f_{\nu_n})_{n\in\mathbf{N}}$ koji konvergira skoro svuda i u meri ka merljivoj funkciji f.

ii) Funkcija f je jedinstvena (do na skup mere nula) sa osobinom da niz $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergira u meri ka f.

Propozicija 9.3. Neka je $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ niz funkcija iz $L^p(X)$ koji konvergira u meri ka f i neka postoji $g \in L^p(X)$ tako da važi

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad x \in X \text{ s.s.}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Tada $f \in L^p(X)$ i $f_n \to f$ u $L^p(X)$, $n \to \infty$.

Dokaz: Pretpostavimo da $(f_n)_n$ ne konvergira u $L^p(X)$ ka f; tada postoje podniz $(f_{\nu_n})_n$ i $\varepsilon > 0$ tako da važi

$$\|f_{\nu_n} - f\|_p \geq \varepsilon, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{9.2}$$

Kako podniz niza koji konvergira ka f u meri takođe konvergira u meri ka f, sledi da niz $(f_{\nu_n})_n$ konvergira u meri ka f. Na osnovu prethodnog tvrđenja i Propozicije 9.2, $(f_{\nu_n})_n$ ima podniz koji konvergira u $L^p(X)$ ka f, što je u kontradikciji sa (9.2). ■

Teorema 9.2. **(Vitalijeva teorema o konvergenciji.)** Dat je merljiv prostor $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Neka je $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ niz u $L^p(X)$, $p \in [1, \infty)$. Tada, $f_n \to f$ u $L^p(X)$, $n \to \infty$, ako i samo ako su zadovoljena sledeća tri uslova:

(1.) $f_n \to f$ u meri, $n \to \infty$.

(2.) $(\forall\varepsilon > 0)(\exists E_\varepsilon \in \mathcal{M})(\mu(E_\varepsilon) < \infty)$

$$\Big(((F \in \mathcal{M}) \wedge (F \cap E_\varepsilon) = \emptyset) \Rightarrow (\forall n \in \mathbf{N})(\int_F |f_n|^p d\mu < \varepsilon^p)\Big).$$

(3.) $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta(\varepsilon) > 0))$

$$\Big(((E \in \mathcal{M}) \wedge (\mu(E) < \delta(\varepsilon))) \Rightarrow (\forall n \in \mathbf{N})(\int_E |f_n|^p d\mu < \varepsilon^p)\Big).$$

Napomena. Ako je niz ograničen Lebegovom integralnom dominantom, tada su uslovi (2.) i (3.) automatski ispunjeni.

9.3 Skoro uniformna konvergencija.

Definicija 9.3. Niz merljivih realnih funkcija $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ na $(X, \mathcal{M}, \mu)$

- (KSU) *konvergira skoro uniformno* ka $f : X \to \mathbf{R}$, ako

$$(\forall\delta > 0)(\exists E_\delta \in \mathcal{M})(\mu(E_\delta) < \delta)$$

$$(\text{ niz } (f_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ uniformno konvergira ka } f \text{ na } X \setminus E_\delta),$$

pri čemu uniformna konvergencija ka f na $X \setminus E_\delta$ znači da

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0(\delta,\varepsilon) \in \mathbf{N})(n > n_0(\delta,\varepsilon) \Rightarrow \sup_{x\in X\setminus E_\delta} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

- Niz $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ je *skoro uniformno Košijev* niz, ako za

$$(\forall\delta > 0)(\exists E_\delta \in \mathcal{M})(\mu(E_\delta) < \delta)$$

$$(\text{ niz } (f_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ je uniformno Košijev na } X \setminus E_\delta),$$

pri čemu uniformno Košijev na $X \setminus E_\delta$ znači da

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0(\delta,\varepsilon) \in \mathbf{N})(m, n > n_0(\delta,\varepsilon) \Rightarrow \sup_{x\in X\setminus E_\delta} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon).$$

▲

Jasno, $(KU) \Rightarrow (KSU) \Rightarrow (KSS)$.

Napomena. Ovde se termin "skoro" ne odnosi na uniformnu konvergenciju izvan nekog skupa mere nula! Niz funkcija navedenih u Primeru 9.2 ima osobinu da uniformno konvergira na komplementu skupa $[0, \delta]$ za proizvoljno $\delta > 0$, ali ne postoji skup mere nula na čijem komplementu bi niz uniformno konvergirao.

Naredna propozicija daje ekvivalenciju pojmova skoro uniformno Košijev niz i skoro uniformno konvergentan niz.

Propozicija 9.4. Neka je $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ skoro uniformno Košijev niz. Postoji merljiva funkcija f, takva da $f_n \to f$, $n \to \infty$, skoro uniformno (pa i skoro svuda).

Dokaz: Za dato $k \in \mathbf{N}$ neka je $E_k \in \mathcal{M}$ takav da je $\mu(E_k) < \frac{1}{2^k}$ i niz $(f_n)_n$ uniformno Košijev pa i uniformno konvergentan na E_k^c. Neka je dalje $F_k = \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j$. Jasno, $F_k \in \mathcal{M}$ i $\mu(F_k) < 2^{-k+1}$. Primetimo da tada niz $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergira uniformno na $F_k^c \subseteq E_k^c$.

Definišimo niz $(g_k)_{k\in\mathbf{N}}$ na sledeći način:

$$g_k(x) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(x), & x \in F_k^c \\ 0, & x \in F_k \end{cases}.$$

Niz skupova $\{F_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ je opadajući, pa na osnovu Teoreme 2.1 za $F = \bigcap_{k\in\mathbf{N}} F_k$ važi da je $F \in \mathcal{M}$ i $\mu(F) = 0$.

Ako je $h \leq k$, tada $g_h(x) = g_k(x)$, $x \in F_h^c$. Dakle, niz $(g_k)_{k\in\mathbf{N}}$ konvergira na čitavom skupu X ka merljivoj funkciji koju ćemo označiti sa f.

Ako $x \in F_k^c$, tada je $f(x) = g_k(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Dakle, niz $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergira ka f na F^c, tj. konvergira skoro svuda ka f na X.

Ostalo je još da pokažemo da niz $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ skoro uniformno konvergira ka f. Neka je $\varepsilon > 0$. Postoji $k_0 \in \mathbf{N}$ dovoljno veliko da važi $2^{-k_0+1} < \varepsilon$. Tada $\mu(F_{k_0}) < \varepsilon$ i niz $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergira uniformno ka $g_{k_0} = f$ na $X \setminus F_k$. ■

Propozicija 9.5. Ako niz $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergira skoro uniformno ka f, tada konvergira i u meri. Obratno, ako $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergira u meri ka f, tada ima podniz koji konvergira skoro uniformno ka f.

Dokaz: Neka niz $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ skoro uniformno konvergira ka f. Neka su $\alpha, \varepsilon > 0$. Tada postoji skup $E_\varepsilon \in \mathcal{M}$, $\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$, takav da $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ uniformno konvergira ka f na $X \setminus E_\varepsilon$. Tada, za dovoljno veliko $n \in \mathbf{N}$ važi

$$\{x \in X; \mid f_n(x) - f(x) \mid \geq \alpha\} \subseteq E_\varepsilon,$$

odakle sledi da $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergira u meri ka f.

Obratno, pretpostavimo da niz $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergira u meri ka funkciji f. Prema Teoremi 9.1 sledi da postoji podniz $(f_{\nu_n})_{n\in\mathbf{N}}$ koji konvergira skoro svuda ka funkciji f. Šta više, dokaz te teoreme pokazuje da je ta konvergencija skoro uniformna. ■

Primenom prethodne propozicije i činjenice da $L^p(X)$ konvergencija implicira konvergenciju u meri, zaključujemo da ako niz konvergira u $L^p(X)$, tada on ima podniz koji konvergira skoro uniformno. Primer niza funkcija navedenih u Primeru 9.2 pokazuje da obrnuto ne važi tj. da skoro uniformna konvergencija u opštem slučaju ne implicira konvergenciju u $L^p(X)$. Ipak, uz dodatni uslov o postojanju Lebeg integrabilne dominante ova implikacija važi.

Jedna od posledica Propozicije 9.4 je da skoro uniformna konvergencija implicira skoro svuda konvergenciju. Bez uslova $\mu(X) < +\infty$ obrnuto ne važi, što pokazuje primer niza funkcija navedenih u Primeru 9.4.

Teorema 9.3. (Teorema Egorova.) Neka je $\mu(X) < \infty$ i $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ niz realnih merljivih funkcija koji konvergira skoro svuda ka realnoj merljivoj funkciji f. Tada niz $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergira skoro uniformno i u meri ka f.

Dokaz: Bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da niz $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergira u svakoj tački skupa X ka f.

Za $m, n \in \mathbf{N}$ definišimo skup

$$E_n(m) = \bigcup_{k=n}^{\infty} \{x \in X : | f_k(x) - f(x) | \geq \frac{1}{m}\}.$$

Jasno, $E_n(m) \in \mathcal{M}$ i $E_{n+1}(m) \subseteq E_n(m)$, $n \in \mathbf{N}$. Kako $f_n(x) \to f(x), n \to \infty$, za sve $x \in X$, sledi da je $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n(m) = \emptyset$. Zbog pretpostavke teoreme da je $\mu(X) < \infty$, imamo da $\mu(E_n(m)) \to 0$ kada $n \to \infty$.

Neka je $\delta > 0$ i $k_m \in \mathbf{N}$ takav da važi:

$$\mu(E_{k_m}(m)) < \frac{\delta}{2^m}, \quad E_\delta = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_{k_m}(m).$$

Iz definicije skupa E_δ sledi da $E_\delta \in \mathcal{M}$ i $\mu(E_\delta) < \delta$. Ako $x \notin E_\delta$ tada $x \notin E_{k_m}(m), m \in \mathbf{N}$, pa važi

$$| f_k(x) - f(x) | < \frac{1}{m}, \text{ za sve } k \geq k_m.$$

To znači da niz $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ uniformno konvergira na komplementu skupa E_δ tj. konvergira skoro uniformno na X.

∎

Dijagram odnosa raznih tipova konvergencije.

Prethodno razmatrani odnosi između različitih tipova konvergencije mogu se sistematski predstaviti sledećim dijagramom.

Legenda oznaka:

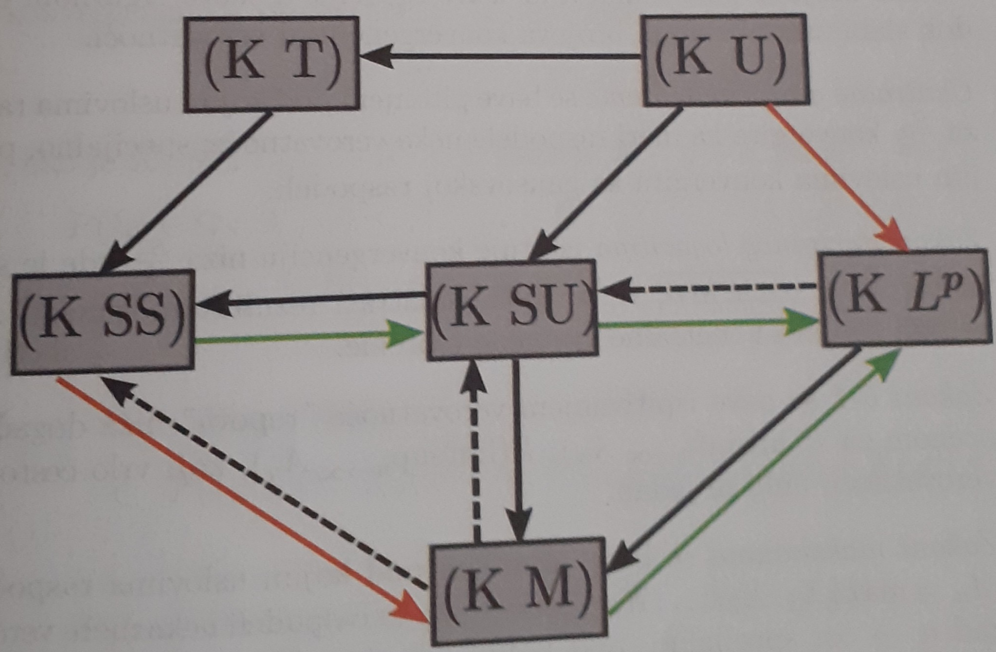
(KU) – konvergencija uniformno
(KT) – konvergencija tačkasto
(KSS) – konvergencija skoro sigurno
(KSU) – konvergencija skoro uniformno
(KL^p) – konvergencija u srednjem reda p
(KM) – konvergencija u meri.

Puna strelica u dijagramu predstavlja implikaciju, a isprekidana označava da neki *podniz* konvergira u datom tipu konvergencije.

Strelice **crne boje** označavaju implikaciju koja važi u proizvoljnom merljivom prostoru.

Strelice **crvene boje** označavaju implikaciju koja važi u prostoru konačne mere.

Strelice **zelene boje** označavaju implikaciju koja važi uz pretpostavku o postojanju Lebeg integrabilne dominante.



Dijagram 9.1: odnosi između različitih tipova konvergencije.